Revista sítio novo
Instituto Federal do Tocantins

Análise do desempenho de alunos na resolução de problemas de múltiplos e divisores à luz da teoria de Vergnaud[(4)]

Edislana Alves Barros Andrade[(1)],
Marcia Cristina Gonçalves Gomes[(2)] e
José Ricardo e Souza Mafra[(3)]

Data de submissão: 4/6/2020. Data de aprovação: 6/10/2020.

Resumo – Este trabalho propôs-se fazer uma análise e inferência a partir da produção de registros sinalizados pelos alunos e suas representações com base em seus esquemas conceituais informados, no que diz respeito à resolução das atividades propostas envolvendo o conteúdo de múltiplos e divisores. Utilizando a Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud, interpretaram-se as respostas e, consequentemente, as dificuldades observadas na resolução. O estudo foi realizado na cidade de Paraíso do Tocantins, na escola Instituto Presbiteriano Vale do Tocantins, com estudantes do 6° ano do ensino fundamental. Trata-se de uma pesquisa de abordagem qualitativa, do tipo exploratória e documental, em que se objetivou delinear um cenário de investigação capaz de fornecer subsídios de respostas através da resolução de questões propostas aos alunos, visando a discussão de informações pertinentes, através do principal instrumento utilizado: uma atividade composta por cinco questões de ensino. Como resultado, constatou-se que a análise das resoluções é uma estratégia eficiente, porque permite compreender as dificuldades que os alunos enfrentam diante de um conteúdo ou conceito matemático.
Palavras-chave: Campos conceituais. Ensino de matemática. Estruturas multiplicativas.

Analysis of student performance in solving multiple and divisor problems in the light of Vergnaud's theory

Abstract – This paper’s goal is to analyze and infer activities that involve the content of multiples and dividers based on the production of records signaled by the students and their representations, in which they inform their conceptual schemes, when solving exercises about this subject. Using Gerard Vergnaud's Theory of Conceptual Fields, the answers and the difficulties observed in the resolution were interpreted. The study was carried out in the city of Paraíso do Tocantins, at the Instituto Presbiteriano Vale do Tocantins school, with students currently taking the 6th year of elementary school. This is a qualitative research of exploratory and documentary type, in which the objective was to outline an investigation scenario capable of providing answer subsidies, through the resolution of questions proposed to students, aiming at the discussion of pertinent information, through the main instrument used: an activity composed of five teaching questions. As a result, it was found that the analysis of resolutions is an efficient strategy, because it allows understanding the difficulties that students face when faced with a mathematical content or concept.
Keywords: Conceptual fields. Mathematics teaching. Multiplicative structures.

[1]Aluna especial do Programa de Pós-graduação em Educação, da Universidade Federal do Tocantins – UFT. *edislanaalves@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6145-8216.
[2] Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (REAMEC), da Universidade Federal do Mato Grosso – UFMT, professora do Instituto Federal do Tocantins – IFTO. Bolsista do Pró-qualificar - IFTO. *marciacristina@ifto.edu.br. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8794-4252.
[3] Doutor em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte, professor associado da Universidade Federal do Oeste do Pará - UFOPA. *jose.mafra@ufopa.edu.br . ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3629-8959.
[4] Trabalho extraído do TCC do curso de Licenciatura em Matemática do *Campus* Paraíso do Tocantins, do Instituto Federal do Tocantins – IFTO.

Introdução

No decorrer do Estágio Supervisionado, atividade obrigatória do curso de Licenciatura em Matemática, realizado na escola Instituto Presbiteriano Vale do Tocantins, em turmas do 6° ano do ensino fundamental, observou-se que muitos alunos apresentaram dificuldades de aprendizagem no conteúdo de múltiplos e divisores, o que pôde ser constatado em uma coleta de dados, a qual apontou tal dificuldade como a maior responsável por notas baixas, baseado nas avaliações realizadas. Esse fato levou os autores a questionarem como esses alunos estariam resolvendo as questões envolvendo esse conteúdo.

Segundo os PCNs de Matemática,

> conceitos como os de múltiplo e divisor de um número natural ou o conceito de número primo podem ser abordados neste ciclo como uma ampliação do campo multiplicativo, que já vinha sendo construído nos ciclos anteriores, e não como assunto novo, desvinculado dos demais. Além disso, é importante que tal trabalho não se resuma à apresentação de diferentes técnicas ou de dispositivos práticos que permitem ao aluno encontrar, mecanicamente, o mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum sem compreender as situações-problema que esses conceitos permitem resolver (BRASIL,1998, p. 66).

De acordo com os PCNs, para desenvolver nos estudantes habilidades e competências em Matemática é necessário trabalhar situações-problema que possam ser consideradas um dos pontos de partida para o ensino de procedimentos e conceitos dessa disciplina. Afirmam ainda que a principal competência a ser desenvolvida nos estudantes são estratégias de resolução de problemas (BRASIL, 1998).

Neste estudo, as situações-problema apresentadas, denominadas instrumentos da pesquisa, estão baseadas na Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud, com foco nas estruturas multiplicativas das relações quaternárias e ternárias. Buscou-se embasamento nas estruturas multiplicativas por explorar as operações de multiplicação e divisão. Entre os elementos que compõem o campo conceitual fez-se uso dos esquemas que constituem os caminhos percorridos pelos alunos para chegar à resposta de um problema. Assim, esses caminhos percorridos, refletidos nos esquemas produzidos, nos mostrariam e trariam à tona os obstáculos que os estudantes enfrentam nas resoluções dos problemas.

A partir deste delineamento, constitui objetivo da pesquisa estudar as respostas dos estudantes e revelar as dificuldades apresentadas por eles no conteúdo de múltiplos e divisores.

Uma ferramenta para o diagnóstico dos alunos

A Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud trata-se de uma teoria cognitivista, em que a conceitualização é a base, fundamentada em cinco palavras-chave: campo conceitual, conceito, situações, esquemas e invariantes operatórios. Sua principal finalidade, de acordo com Klein e Costa (2011, p. 49), "é propor uma estrutura que permita compreender as filiações e rupturas entre conhecimentos, em crianças e adolescentes. Entende-se por 'conhecimentos', tanto as habilidades quanto as informações expressas".

Vergnaud (2014) esclarece que a Matemática forma um conjunto de relações organizadas em sistemas, classificadas como binárias, ternárias e quaternárias. As relações binárias ligam dois elementos entre si, exemplo: José tem a mesma idade que Maria. As relações ternárias ligam três elementos entre si, exemplificando: cinco multiplicado por dois resulta em dez. E por último, as relações quaternárias ligam quatro elementos entre si, traduzem a identidade de duas relações binárias: Pedro é moreno, e Laura é loira.

No que diz respeito a análise das condutas das crianças diante das tarefas que conduzem aos acertos ou erros, Vergnaud (2014) salienta a importância de analisar os caminhos utilizados pelo sujeito para resolver um problema por estar relacionado à representação que ele faz das situações, essa representação não está apenas relacionada aos símbolos e signos, mas também a noção de conceito. O conhecimento conceitual acontece quando o sujeito entra em contato com várias situações.

Vergnaud (1993) define campo conceitual como um conjunto de situações tratadas por uma variedade de conceitos, procedimentos e representações, conectados uns com os outros. Por meio da Teoria dos Campos Conceituais, pode-se entender como os alunos constroem os conceitos matemáticos, observando como realizam suas estratégias para resolução de situações propostas em conteúdos não apenas da Matemática, mas também de outras ciências. De acordo com o próprio autor, a formação dos conceitos pode ser observada por meio das estratégias de ação ao resolver um problema.

A situação em que o problema está inserido modifica a forma como o aluno interpreta e representa o problema e as estratégias que ele utiliza para resolvê-lo. Ressalta-se que os níveis de dificuldades dos problemas matemáticos dependem das situações em que são apresentados.

Mediante isto, Bittar e Muniz (2009) em suas palavras definem conceito como três conjuntos distintos, composto da seguinte forma: Conceito = (S, I, L) onde,

> S é conjunto de situações que dão sentido ao conceito; I é conjunto de invariantes operatórios que estruturam as formas de organização da atividade (esquemas) suscetíveis de serem evocados por essas situações; L é conjunto de representações linguísticas e simbólicas (algébrica, gráfica...) que permitem representar os conceitos, suas relações e, consequentemente, as situações e os esquemas que eles evocam (BITTAR; MUNIZ, 2009, p. 29).

Um conceito para se desenvolver e ser usado pelo aluno necessita considerar, simultaneamente, três conjuntos: as situações, os invariantes operatórios e as representações linguísticas e simbólicas – os mesmos serão elencados e definidos na sequência.

Um conceito torna-se significativo através de uma variedade de situações. Por conseguinte, as situações é que dão sentido ao conceito. As situações a que Vergnaud se refere têm relação com as tarefas ou problemas passados pelo professor, com a finalidade de desenvolver os processos cognitivos e suas respostas. Vergnaud (1993) define que situação é:

> Uma combinação de tarefas, às quais é importante conhecer suas naturezas e dificuldades próprias. O desempenho em cada subtarefa tem importância para o desempenho global, mas, se houver dificuldades, elas, necessariamente, não precisam ser somadas ou multiplicadas. Destaca que, num certo campo conceitual, existe uma grande variedade de situações e os conhecimentos dos alunos são moldados pelas situações que encontram e que, progressivamente, dominam (VERGNAUD, 1993 apud KLEIN; COSTA, 2011, p. 50).

Ainda, Vergnaud (1983, apud Moreira, 2002, p. 23) diz que, “na verdade, os conceitos se desenvolvem através da resolução de problemas, e esse desenvolvimento é lento”. Isso significa que a resolução de problemas ou as situações de resolução de problemas são essenciais para a conceitualização.

A partir desta visão, entende-se que os conceitos são compreendidos quando aos alunos é oportunizada uma diversidade de atividades de resolução de problemas, que envolvem diversas propriedades de um mesmo conceito.

Dessa forma, o professor tem como primeiro passo escolher situações de aprendizagem que estimulem os alunos a desenvolverem uma diversidade maior de esquemas, pois é por meio desses que se pode compreender a maneira com que o aluno organiza a resolução das situações, ou seja, são as estratégias que ele adota.

O termo *esquema*, segundo Santos (2012, p. 90), “atende a uma organização feita pelo próprio sujeito aprendiz, que tem como objetivo central conduzir o processo de resolução de uma dada situação”. Então pode-se compreender esquema como sendo a maneira pela qual o aluno organiza a resolução de uma dada situação.

Outro conceito relevante que faz parte dos esquemas são os invariantes operatórios. A noção de invariante é a passagem da realidade à representação. Sob esta ótica, Vergnaud (2014) afirma que:

> A elaboração de invariantes é instrumento decisivo na construção da representação: são os invariantes que asseguram à representação sua eficácia, permitindo-lhe preencher sua dupla função: de refletir a realidade; de prestar-se a um cálculo relacional. São os invariantes que dão à representação seu caráter operatório (VERGNAUD, 2014, p. 308).

Os invariantes operatórios são organizados em dois tipos: teoremas-em-ação e conceitos-em-ação, embora tenham a mesma função existe diferença entre eles. Sobre a relação dos componentes dos invariantes, Moreira (2002) considera:

> Há uma relação dialética entre conceitos-em-ação e teoremas-em-ação, uma vez que conceitos são ingredientes de teoremas e teoremas são propriedades que dão aos conceitos seus conteúdos. Mas seria um erro confundi-los. Conceitos em ação são ingredientes necessários das proposições. Mas conceitos não são teoremas, pois não permitem derivações (inferências ou computações); derivações requerem proposições. Proposições podem ser verdadeiras ou falsas; conceitos podem ser apenas relevantes ou irrelevantes. Ainda assim não existem proposições sem conceitos (MOREIRA, 2002, p. 16).

Os invariantes operatórios reúnem-se às situações e representações para construir os conceitos. Isso significa que, quando um aluno resolve uma determinada atividade, utiliza determinados conhecimentos que são implícitos, os chamados invariantes operatórios e é o estudo desses invariantes que vai permitir identificar e compreender as dificuldades de aprendizagem relativas a um determinado campo conceitual.

No processo mediador entre o professor e o aluno, a linguagem e os símbolos são usados, amplamente, pelo docente. As formas de linguagem representam simbolicamente os conceitos e não seria possível falar neles, pois são representados a partir das linguagens e símbolos, que ajudam a estimular o pensamento do aluno. Representam as formulações matemáticas e definições.

O conjunto das representações simbólicas são, de acordo com Klein e Costa (2011, p.50), a "(linguagem natural, símbolos, gráficos, diagramas), que o indivíduo vai utilizar para representar as relações nas situações".

Vergnaud estudou repetidamente dois grandes campos conceituais, o campo aditivo ou estrutura aditiva e o campo multiplicativo ou estrutura multiplicativa.

Falou-se, anteriormente, que um conceito não está totalmente isolado, sendo assim, adição e subtração fazem parte do mesmo campo conceitual, denominado por Vergnaud de estruturas aditivas. Segundo Vergnaud (2014, p.197), "os matemáticos, a justo título, consideram a subtração e a adição como operações matemáticas estreitamente aparentadas uma da outra".

Para melhor compreensão de campo conceitual multiplicativo, toma-se a definição de Santos (2012, p. 96), sendo "um conjunto de situações, cujo domínio requer uma operação de divisão ou de multiplicação, ou ainda a combinação entre elas".

Diante do exposto, observa-se que o aluno, ao buscar resolver uma situação, mobiliza muitos invariantes em vários esquemas diferentes e utiliza várias representações simbólicas. Desta maneira, a partir de diferentes situações, a criança ou o adolescente podem criar esquemas para tentar resolver um problema, escolhendo uma representação simbólica significativa. Os esquemas podem ser certos ou errados e permite-se modificá-los até chegar à solução correta para a situação proposta.

Campo conceitual multiplicativo

O presente estudo apoia-se nas estruturas multiplicativas de Vergnaud (2014), explorando a multiplicação e divisão com a resolução de problemas de múltiplos e divisores.

É possível distinguir duas categorias de relações multiplicativas, que comportam uma multiplicação ou divisão, que são divididas em duas partes: relações quaternárias e relações ternárias. Nas relações quaternárias o problema oferece três elementos e pergunta pelo quarto, enquanto na relação ternária são dados dois elementos e pergunta-se pelo terceiro. No que diz respeito a relação quaternária, Vergnaud enfatiza ser a mais importante dentre elas, pois é utilizada para ensinar a multiplicação no ensino básico (VERGNAUD, 2014).

Vergnaud (2014) destaca duas classes de problemas que são isomorfismo de medidas, relações quaternárias e o produto de medidas e a relação ternária. Discutir-se-ão as relações que compõem a estrutura multiplicativa da Teoria dos Campos Conceituais: o isomorfismo de medidas e o produto de medidas. De acordo com Vergnaud (2014) o isomorfismo de medidas:

> Coloca em jogo quatro quantidades, mas nos problemas mais simples, sabe-se que uma dessas quantidades é igual a um. Logo, há três grandes classes de problemas conforme seja a incógnita uma ou outras das três outras quantidades (VERGNAUD, 2014, p. 260).

O exemplo que será apresentado abaixo traduz o isomorfismo de duas medidas.

Exemplo 1: Tenho 3 pacotes de iogurte. Há 4 iogurtes em cada pacote. Quantos iogurtes eu tenho?

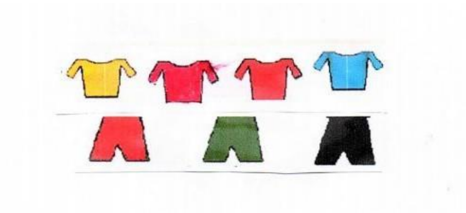
pacotes		iogurtes
1	$\Rightarrow$	4
3	$\Rightarrow$	x

O esquema usado no exemplo 1 é um quadro de correspondência entre duas espécies de quantidades, pacotes de iogurte e iogurte.

A classe de produto de medidas, de acordo a Vergnaud (2014, p. 253), “consiste em uma relação ternária entre três quantidades, das quais uma é o produto das duas outras ao mesmo tempo no plano numérico e no plano dimensional”.

Exemplificando produto de medidas:

Exemplo 2 – Maria viajou e levou 4 blusas e 3 bermudas. Quantos conjuntos de roupas ela pode formar?



$$4 \text{ x } 3 = 12$$

Observa-se que o esquema representa quatro blusas e três bermudas e através da multiplicação de quatro blusas por 3 bermudas temos então 12 conjuntos de roupas. Logo, estamos diante de uma relação ternária.

Segue uma breve distinção entre as relações ternárias e quaternárias. Abaixo um modelo de relação quaternária:

Exemplo 3: Na cantina da escola um salgado custa R$ 3,00. Quanto pagarei por 7 salgados?

Esse problema é geralmente resolvido na escola como uma relação ternária da seguinte forma: a x b = c (3 x 7 = 21). Entretanto, o que está implícito nesta situação é uma relação quaternária entre duas quantidades de grandezas de naturezas diferentes que pode ser mostrada no esquema a seguir:

salgado

preço 1 $\Rightarrow$ 3

7 $\Rightarrow$ x

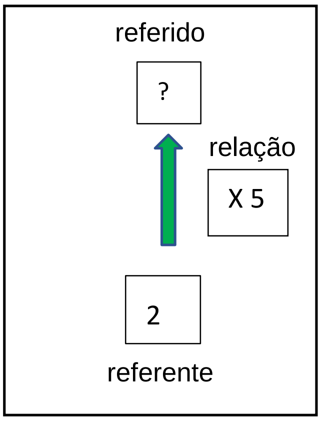
O exemplo 3 é uma de relação quaternária em que se tem duas quantidades de medidas como salgado e duas outras medidas que são preço. Logo, todo problema relacionando duas quantidades de medidas de uma certa unidade e duas outras medidas com outra unidade representará uma relação quaternária (VERGNAUD, 2014).

Diferente da relação quaternária, a relação ternária envolve três quantidades, das quais uma é produto das outras duas ao mesmo tempo (VERGNAUD, 2014). Ou seja, a relação ternária ocorre entre dois elementos, de mesma natureza ou grandeza, que se compõem para formar um terceiro elemento. A seguir apresentamos um exemplo para ilustrar a relação ternária.

Exemplo 4: Em uma papelaria uma caneta custa R$ 2,00 e um caderno custa 5 vezes o valor da caneta. Quanto custa o caderno?

Esquematizando a situação:

Figura 1 – Esquema que representa o exemplo 4



Fonte: Os autores.

Na situação do exemplo 4 conhece-se o referente, o preço da caneta e a relação vezes cinco; deve-se calcular o valor do caderno que está relacionado ao valor da caneta. Para resolver usa-se a multiplicação, ou seja, referente x relação = referido (2 x 5 = 10).

Portanto o estudo das relações multiplicativas mostra que há várias classes de problemas cuja solução pede uma multiplicação ou uma divisão e a diferença dessas classes deve ser cuidadosamente abordada para que o aluno encontre qual estratégia usar e que conduzirá à solução correta.

Materiais e métodos

Em nossa experiência docente, constatamos dificuldades diversas dos alunos em compreender o conceito de múltiplos e divisores, razão pela qual o objeto desta pesquisa centra-se na análise de respostas e, consequentemente, as dificuldades observadas envolvendo este conteúdo.

Assim, a opção metodológica para este estudo estabeleceu princípios de uma pesquisa de abordagem qualitativa, com elementos de uma investigação de cunho exploratório (GIL, 1999), em que se objetivou delinear um cenário de investigação capaz de fornecer subsídios de respostas, através da resolução de questões propostas aos alunos, visando a discussão de informações pertinentes, através do principal instrumento utilizado: uma atividade composta por cinco questões de ensino.

Além disso, em adição aos procedimentos metodológicos utilizados, o levantamento de informações foi realizado com base em uma entrevista realizada com o professor da disciplina de Matemática, pois entendemos que esse instrumento de coleta de dados apresenta uma flexibilidade com o entrevistado, que oferece ao entrevistador informações mais precisas, em relação ao objeto de pesquisa. Por fim, utilizaram-se elementos de pesquisa documental, de forma a obter informações sobre o desempenho e rendimento dos estudantes, através da recolha de notas e resultado de avaliações, em cinco turmas do 6° ano do ensino fundamental, em um total de 118 alunos.

O local de sua realização foi na escola conveniada Instituto Presbiteriano Vale do Tocantins, localizada na cidade de Paraíso do Tocantins. A escola possui 1077 alunos, sendo 719 alunos do ensino fundamental e 358 alunos do ensino médio, matriculados nos turnos matutino e vespertino. Para realização do trabalho, foi solicitada permissão à direção da escola e seguimos todos os procedimentos éticos do anonimato.

A configuração de análise e inferência de resultados foi ordenada em função da produção de registros sinalizados pelos alunos e suas representações, a partir dos seus esquemas conceituais informados, quando da resolução das atividades propostas. A partir daí, realizou-se uma conexão com os referenciais teóricos discutidos na seção anterior, de forma a relacionar as informações obtidas com as discussões estabelecidas envolvendo os campos conceituais e as estruturas multiplicativas e divisibilidade.

Ao analisar os dados, identificou-se o conteúdo de múltiplos e divisores como responsável pelo baixo rendimento da maioria dos estudantes. O quadro 1 mostra o rendimento dos alunos:

Quadro 1 – Participantes da pesquisa quanto às notas: levantamento da avaliação do conteúdo de múltiplos e divisores

Turma	**Número de participantes**	**Número de participantes com nota abaixo da média**	**% de participantes abaixo da média**
A	25	12	48
B	24	11	45,8
C	27	7	25,9
D	20	12	60
E	22	17	77,3

Fonte: Professor da disciplina de Matemática na escola

Observa-se no quadro 1 que dos 118 estudantes 59 apresentaram nota inferior à média, este fato demonstra uma deficiência dos alunos em relação ao conteúdo de múltiplos e divisores.

Para esse estudo, aplicou-se uma atividade com cinco questões, em que o aluno deveria utilizar seu conhecimento sobre o conceito de múltiplos e divisores para respondê-las. Essa atividade foi aplicada somente nas turmas B e D, pelo fato de o estágio observação ter acontecido apenas nestas duas turmas, totalizando 44 respondentes. O objetivo foi proporcionar aos alunos uma diversidade de questões abrangendo o assunto de múltiplos e divisores, de forma a dar sentido aos conceitos, para, assim, através de suas respostas (sejam elas, certas ou erradas), tornar possível entender o caminho percorrido na resolução das mesmas. Assim, foram apresentadas questões norteadas pela Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud que pudessem contemplar relações quaternárias e ternárias.

As atividades foram retiradas do livro didático dos autores Pataro e Souza (2015), usado pelo professor durante as aulas, oportunidade em que se procurou escolher problemas com os quais os alunos tivessem que pensar em qual caminho percorrer para resolver a atividade. Dessa maneira, o detalhamento da resolução para chegar ao resultado solicitado no enunciado da atividade foi exigido, com o objetivo de analisar as estratégias usadas pelo aluno.

As questões foram aplicadas em quatro aulas de 50 min. cada, acompanhadas pelo professor de Matemática regente e realizada por um dos autores. Apresentam-se no quadro 2 as questões aplicadas aos alunos.

Quadro 2 – Questões aplicadas nas turmas selecionadas

Questão	**Categoria da relação**	**Enunciado**
1	Quaternária	Marlene trabalha como diarista e recebe RS$ 95,00 reais por dia. Quantos reais Marlene recebeu em um mês em que trabalhou 22 dias?
2	Ternária	Para preparar um *sundae*, certa sorveteria oferece 9 tipos de coberturas e 7 sabores de sorvete. Quantas combinações podem ser feitas no preparo de um *sundae* usando uma cobertura e um sabor de sorvete?
3	Ternária	Para dar uma volta de bicicleta em uma quadra de esportes, uma bicicleta amarela demora 12 segundos e uma outra vermelha 16 segundos. Em quantos segundos, após terem partido juntas do ponto de largada, as bicicletas passarão juntas novamente?
4	Ternária	Lucas tem 72 carrinhos em sua coleção e pretende organizar todos eles em quantidades iguais para colocá-los em prateleiras. É possível Lucas distribuir os carrinhos em 4 prateleiras? O número 4 é divisor de 72?
5	Quaternária	Jéssica tem 3 pedaços de tecido que serão cortados para fazer fantasias. Para obter melhor aproveitamento dos tecidos, ela vai cortá-los com o maior comprimento possível de forma que os pedaços tenham todos o mesmo comprimento e que não tenha sobra. O tecido vermelho mede 12 m, o azul, 8 m e o amarelo, 20 m. Qual o comprimento de cada pedaço de tecido?

Fonte: Os autores.

Para os resultados e discussões das respostas coletadas, foram selecionadas aquelas com maior variedade de esquemas nas resoluções apresentadas pelos alunos, fazendo-se uma comparação entre o uso correto do esquema e o que ele respondeu.

Resultados e discussões

Neste primeiro momento, analisar-se-ão os caminhos e/ou esquemas que conduziram os estudantes a respostas erradas. Acreditamos que o erro na utilização dos esquemas deve-se a concepção equivocada dos conceitos e teoremas em ação, presentes nos mesmos.

QUESTÃO 1: Marlene trabalha como diarista e recebe R$ 95,00 reais por dia. Quantos reais Marlene recebeu em um mês em que trabalhou 22 dias?

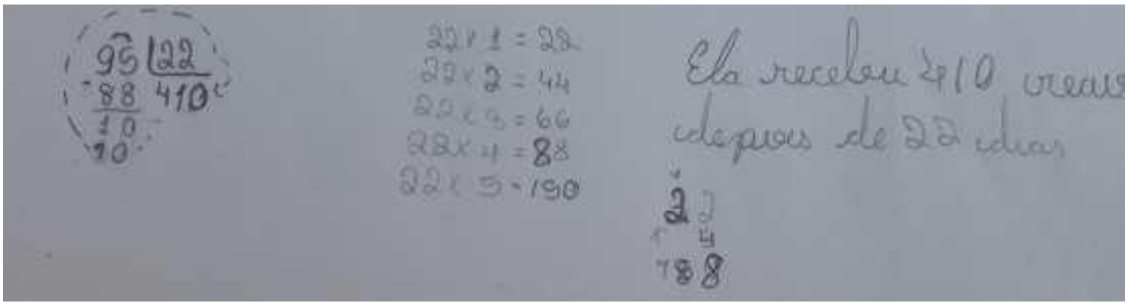
A questão 1 é uma categoria de relação quaternária, na qual o enunciado fornece três elementos: o salário de R$ 95,00 de uma diarista em um dia trabalhado e a quantidade de 22 dias; pede um quarto elemento que é o salário referente aos 22 dias trabalhados.

A operação é a multiplicação que envolve o cálculo relacional de proporcionalidade entre quatro elementos. Nesta questão, dos 44 alunos participantes, 20 alunos não conseguiram encontrar a resposta correta.

Uma formulação para o problema: se o valor de um dia corresponde a R$ 95,00 reais, então 22 dias correspondem a x reais. Então, x reais = (95 reais x 22 dias) / 1 dia. Temos como resposta R$= 2090,00 reais.

Note a seguir o esquema usado pelo aluno 1 para resolver a questão 1.

Figura 2 - Resolução da questão 1 por aluno 1



Fonte: Dados da pesquisa

Pode-se observar na figura 2 que o aluno 1 utilizou dois esquemas, na primeira representação ele usou o algoritmo da divisão, nesta operação ele divide o salário pelos dias trabalhados. Este esquema é inapropriado, pois, ao usar a divisão ao invés da multiplicação, ele não conseguiu identificar a operação correta, além de realizar o cálculo da subtração errado (95-88=10) e na sequência o aluno acrescenta zero no quociente. Este registro revela um desconhecimento do uso do algoritmo da divisão, essa dificuldade pode estar relacionada a não compreensão do posicionamento do sistema de numeração decimal. No esquema ao lado ele demonstrou o teorema em ação, 1 está para 22, 2 está para 44 e assim sucessivamente; consideramos este esquema um procedimento próprio. Nota-se na última multiplicação um erro (22 x 5=150). Percebe-se que o aluno tem dificuldade para fazer a interpretação da situação-problema, não conseguindo usar estratégias para chegar com êxito ao resultado. O desempenho do aluno 1 com relação aos acertos das questões aplicadas atingiu 0%.

A análise destes procedimentos e situação apresentados estão vinculados ao que Vergnaud (2014) discute em relação aos caminhos formulados e elaborados pelos alunos, nos processos de resolução das questões e a conexão direta destas resoluções com as representações esquemáticas apresentadas pelos mesmos. A relação entre o conhecimento conceitual estabelecido pelo aluno e as situações por ele vivenciadas, a partir dos problemas propostos, pode permitir uma interação maior entre o processo gradativo de esclarecimentos e entendimentos sobre os conceitos matemáticos, a medida que seu campo conceitual formulado ou construído se expande.

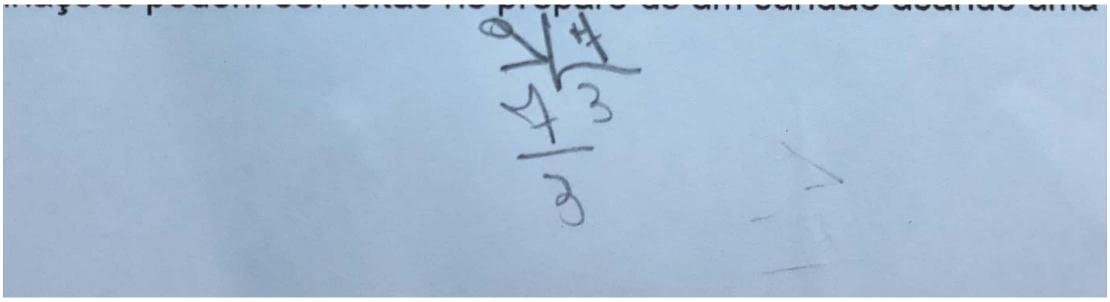
QUESTÃO 2: Para preparar um *sundae*, certa sorveteria oferece 9 tipos de coberturas e 7 sabores de sorvete. Quantas combinações podem ser feitas no preparo de um *sundae* usando uma cobertura e um sabor de sorvete?

Esta questão 2 é uma forma de relação ternária, o enunciado fornece dois elementos que são nove tipos de coberturas e sete sabores de sorvete e pede um terceiro elemento que é a combinação entre eles.

Nesta questão, espera-se que o aluno compreenda que pode efetuar o produto das quantidades correspondentes às coberturas e aos sorvetes, isto é, (9 coberturas) x (7 sabores de sorvetes) = 63 combinações diferentes. Nesta questão, dos 44 alunos participantes, 24 alunos erraram.

Esquemas de resolução dos alunos a seguir:

Figura 3 – Resolução da questão 2 pelo aluno 4



Fonte: Dados da pesquisa

Conforme figura 3, o aluno 4 não consegue identificar a operação, sendo que, ao contrário de multiplicar, ele usa em seu esquema a divisão, que conduz ao erro. O teorema em ação observado é que dividindo as coberturas pelos sabores, chegar-se-ia às quantidades de combinações. Percebe-se que o aluno interpretou a questão errado, o que o conduziu ao resultado não esperado. Conclui-se que o aluno tem dificuldade em identificar qual operação utilizar para resolver as atividades. O desempenho do aluno 4 com relação aos acertos das questões aplicadas atingiu 0%.

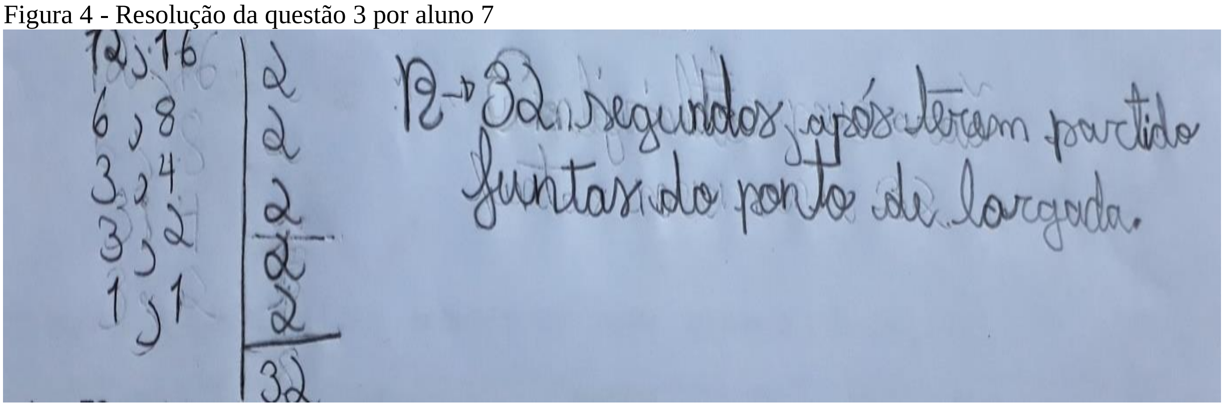
QUESTÃO 3: Para dar uma volta de bicicleta em uma quadra de esportes, uma bicicleta amarela demora 12 segundos e uma outra vermelha, 16 segundos. Em quantos segundos, após terem partido juntas do ponto de largada, as bicicletas passarão juntas novamente?

A questão 3 é uma forma de relação ternária na qual o enunciado fornece 2 elementos: 1 tempo de 12 segundos e outro tempo de 16 segundos e pede um terceiro elemento que é o tempo que elas passarão juntas novamente.

Para resolver o problema, é necessário encontrar entre os múltiplos de 12 e 16 o mínimo (menor) múltiplo comum (mmc) de 12 e 16. Os múltiplos de 12: (0, 12, 24, 36, 48, 60, ...). Os múltiplos de 16: (0, 16, 32, 48, 64, ...). Como o mmc (12, 16) = 48, tem-se que, após 48 segundos, as bicicletas passarão juntas novamente. Nesta questão, dos 44 alunos participantes, 23 erraram. Ressalta-se que, na atividade aplicada em sala, todos os alunos usaram os mesmos esquemas para resolver a questão: a fatoração dos números dados no enunciado. Sublinha-se que a utilização da fatoração pode ter sido o único caminho ensinado pelo professor em sala. Percebe-se que a maioria dos alunos apresenta dificuldades na multiplicação e supõe-se um déficit na tabuada.

Na figura 4, verifica-se o esquema do aluno 7 para resolver a questão.

Figura 4 - Resolução da questão 3 por aluno 7



Fonte: Dados da pesquisa

Observa-se que o aluno 7 conseguiu desenvolver um esquema correto para resolução, sua

Revista sítio novo
Instituto Federal do Tocantins

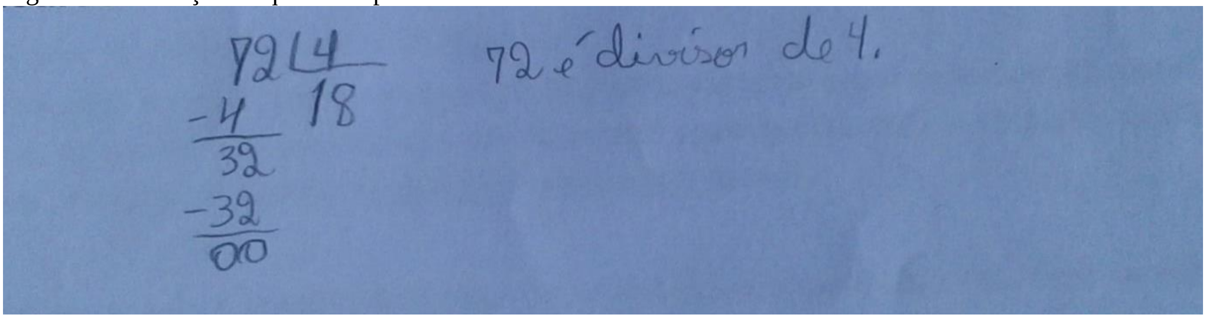
estratégia foi a fatoração, apesar de ser o algoritmo tradicional. Teorema em ação utilizado pelo estudante: se decompor o tempo das duas bicicletas, o resultado representa o momento em que elas vão passar juntas novamente. Embora ele use o esquema correto, não conseguiu chegar à resposta certa, pois cometeu um erro na última fatoração, o que o conduziu ao resultado incorreto. Considera-se que ele realizou um esquema eficiente para a resolução do problema proposto, trabalhando o conceito de múltiplos com esse teorema em ação. Tal encaminhamento, com base na concepção dos invariantes (MOREIRA, 2002), pode apresentar diferentes representações simbólicas e esquemas, de forma a projetar registros de resultados associados a compreensão conceitual, dada uma situação proposta. Assim, esses esquemas podem ter um resultado processual satisfatório (resultado correto) ou não (indução ao erro).

Nesta questão 3, apresentou-se a análise da resolução apenas do aluno 7 por ser o esquema usado por, praticamente, todos os alunos, a diferença é apenas os cálculos. O desempenho do aluno 7 com relação aos acertos das questões aplicadas atingiu 0%.

QUESTÃO 4: Lucas tem 72 carrinhos em sua coleção e pretende organizar todos eles em quantidades iguais para colocá-los em prateleiras. É possível Lucas distribuir os carrinhos em 4 prateleiras? O número 4 é divisor de 72?

A questão 4 se encontra na relação ternária, conforme Vergnaud (2014), pois envolve dois elementos, carrinhos e prateleiras e pede um terceiro elemento. Para sua resolução, era esperado que o aluno usasse o esquema da divisão de 72 por 4, obtendo resultado igual a 18 e o resto igual a zero. Com isso, era possível fazer a distribuição nas prateleiras com quantidade igual de carrinhos fornecida pelo enunciado. Como o resultado da divisão de 72 por 4 é exata, diz-se que 4 é divisor de 72. Os dados mostraram que, dos 44 alunos participantes, 22 não acertaram a questão.

Figura 5 - Resolução da questão 4 por aluno 8



Fonte: Dados da pesquisa

Como mostra a figura 5, o esquema do aluno 8 foi colocado nesta etapa por ele ter realizado um esquema correto ao identificar a divisão para solução do problema. Mais uma vez o aluno usa o algoritmo da divisão. Hipótese do teorema em ação: “se dividir 72 carrinhos por 4 prateleiras, então o resultado da divisão com resto zero traduz que o todo, carrinhos, pode ser dividido pelas prateleiras que são as partes”. Entretanto, sua resposta demonstra que implicitamente ele confunde o conceito de divisor e divisível. Ele diz que: “72 é divisor de 4”. Entretanto, é o contrário, 4 é divisor de 72. Pode-se dizer que 72 é divisível por 4, pelo resultado da divisão ser exato. Com esta conclusão, entende-se que o aluno apresenta dificuldades em compreender o conceito de divisores. O desempenho do aluno 8 com relação aos acertos das questões aplicadas atingiu 40%.

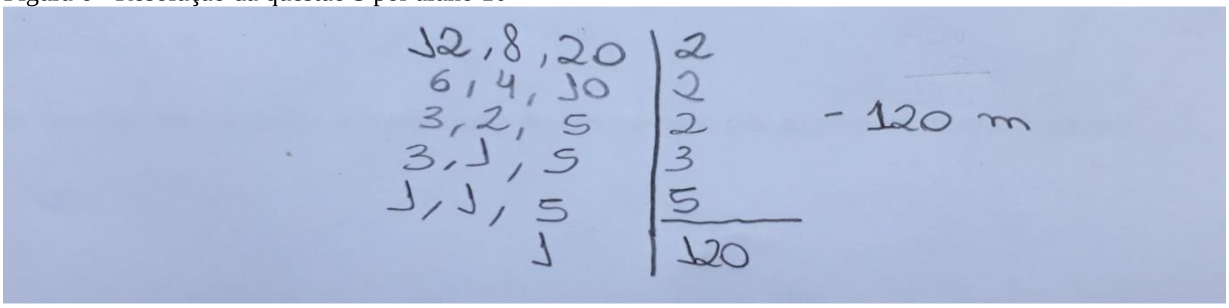
QUESTÃO 5: Jéssica tem 3 pedaços de tecido que serão cortados para fazer fantasias. Para obter melhor aproveitamento dos tecidos, ela vai cortá-los com o maior comprimento possível de forma que os pedaços tenham todos o mesmo comprimento e que não tenha sobra. O tecido vermelho mede 12 m, o azul, 8 m e o amarelo, 20 m. Qual o comprimento de cada pedaço de tecido?

A questão 5 representa uma relação quaternária, o problema fornece 3 elementos: 12 m, 8 m, 20 m, e pede como resolução o comprimento de cada tecido depois de serem cortados com o maior tamanho possível, de forma que os pedaços tenham o mesmo tamanho, sem sobras.

A fim de resolver esse problema, é necessário obter o máximo (maior) divisor comum (mdc) de 12, 8 e 20. Assim, os divisores de 12: 1, 2, 3, 4, 6 e 12; os divisores de 8: 1, 2, 4 e 8; os divisores de 20: 1, 2, 4, 5, 10 e 20. Logo, o comprimento de cada pedaço de tecido será 4 m, pois o mdc (12, 8, 20) é igual a 4.

Nenhum aluno conseguiu acertar a questão 5, os 44 alunos erraram o esquema necessário para chegar ao resultado. Eles usaram o teorema em ação a fatoração entre 12, 8 e 20, portanto, os dados obtidos nessa questão revelam que os alunos apresentam dificuldades na interpretação do problema, o que demonstra falta de apropriação dos conceitos de múltiplos e divisores. Supõe-se que os procedimentos utilizados na forma de algoritmo são os mesmos ensinados pelo professor. Notam-se muitos erros de multiplicação na realização das operações, de modo que se conclui a falta de domínio da tabuada.

Figura 6 - Resolução da questão 5 por aluno 10



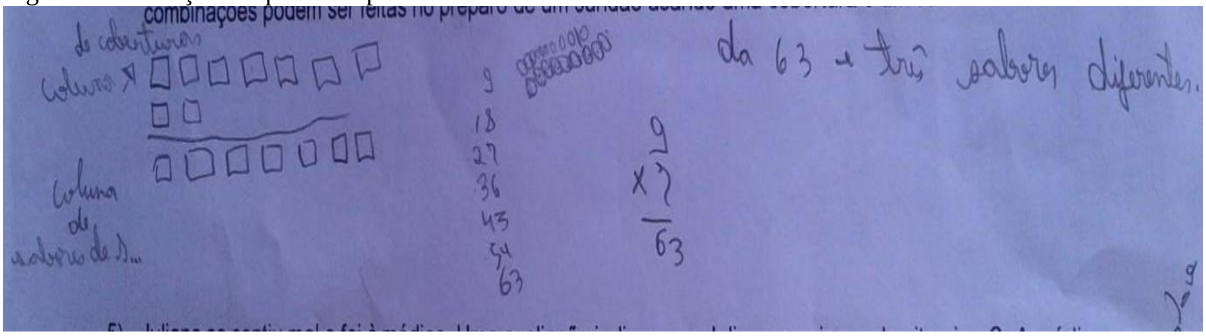
Fonte: Dados da pesquisa

O aluno 10, como pode-se observar na figura 6, utilizou a operação de fatoração entre os elementos contidos no enunciado. O teorema em ação: “fatorando 12, 8 e 20, o resultado igual a 120 corresponde ao comprimento de cada tecido”. Aqui o sentido da pergunta é completamente esquecido, o que é um absurdo frente ao enunciado da questão, que diz que Jéssica tem 3 pedaços de tecido de 12, 8 e 20 metros; se somarmos, teremos como resultado 40 metros no total. O valor que o aluno 10 encontrou é 3 vezes maior que a quantidade de tecido fornecida pelo enunciado do problema. Ressalta-se que o aluno faz mecanicamente a questão, repete o algoritmo na resolução, ensinado, supostamente, pelo professor. O desempenho do aluno 10 com relação aos acertos das questões aplicadas atingiu 60%.

Análise das questões na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais: esquemas usados levaram aos resultados corretos

Aborda-se aqui situações em que o esquema usado na resolução do problema foi adequado e levou o aluno à resposta correta.

Figura 7- Resolução da questão 2 por aluno 12

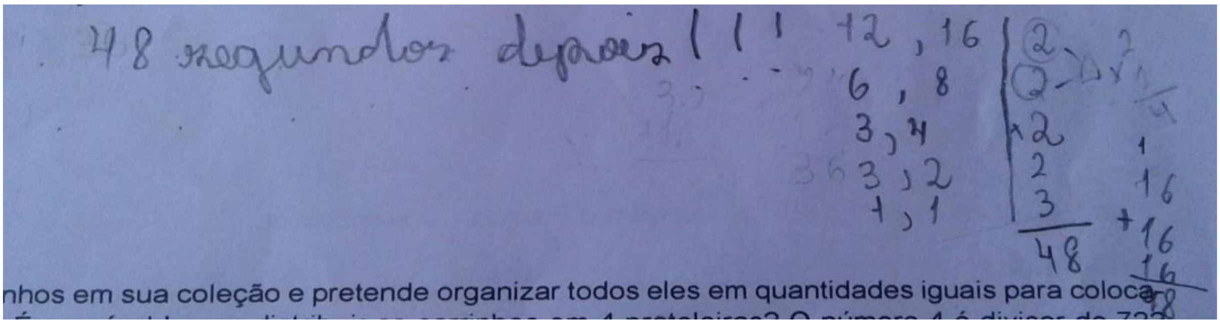


Fonte: Dados da pesquisa

Observa-se, na figura 7, que o aluno 12 utilizou um esquema próprio, produzindo quadradinhos para representar as colunas de coberturas e as colunas de sabores ao realizar a operação. Essa representação de desenho é chamada de pictográficas ou icônicas. Ele percebeu que se temos 9 coberturas e 7 sabores, o total de combinações é dado por 9x7. Ele demonstrou ter noção de proporcionalidade ao fazer outro esquema para chegar à resposta correta do problema: 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, porém apresenta uma resposta que não condiz com o que está sendo perguntado.

Considera-se que o aluno realizou estratégias eficientes de resolução, conseguindo chegar à resposta correta. O desempenho do aluno 12 com relação aos acertos das questões aplicadas atingiu 40%.

Figura 8 - Resolução da questão 3 por aluno 13



Fonte: Dados da pesquisa

Na resolução da figura 8, o aluno 13 usou o esquema da fatoração entre 12 e 16, concluindo que elas se encontrariam juntas novamente a 48 segundos. O esquema foi utilizado corretamente, mas note que na última fatoração ao invés de repetir o algarismo 3, ele já deu o resultado da divisão igual a 1. Percebe-se que ao lado ele substitui o algoritmo da multiplicação pela adição ao fazer: 16+16+16=48.

Considera-se que o aluno atingiu o objetivo da questão ao encontrar o resultado correto e que trabalhou os conceitos de múltiplos corretamente. Ressalta-se que o uso da fatoração corresponde a maneira tradicional e mecânica de resolver, em que o aluno não usou esquema diferente, pois se supõe ser a que o estudante aprendeu em sala. O desempenho do aluno 13 com relação aos acertos das questões aplicadas atingiu 80%.

Em que pese a maior capacidade de compreensão e de clareza na resolução destas situações, resolvidas pelos alunos, levando-os às respostas corretas ou próximas, percebe-se que boa parte dos estudantes não possuem elementos conceituais claros para a resolução de determinados problemas. Discutimos anteriormente, com base em Vergnaud (1983) apud Moreira (2002), o quanto o desenvolvimento dos conceitos e esquemas de compreensão conceitual - envolvendo definições matemáticas - é relativamente lento para muitos de nossos estudantes. Assim, há uma necessidade bastante significativa em apresentarmos uma variedade de situações-problema aos estudantes, de forma a propiciar uma multiplicidade de esquemas possíveis e que estejam vinculados a processos válidos de resolução e resposta.

Considerações finais

É importante lembrar que este trabalho foi motivado a partir das observações e vivências realizadas durante o desenvolvimento do estágio supervisionado, em dois semestres seguidos. A produção destes escritos foi motivada, devido às nossas inquietações, em relação às dificuldades e limitações de aprendizagem dos alunos em relação aos conceitos matemáticos de múltiplos e divisores. Optamos em assumir um referencial teórico pautado na Teoria dos Campos Conceituais, de Vergnaud, impulsionados por descobrir a origem desse problema, sob uma ótica voltada para considerações sobre a prática docente e o aprendizado dos alunos no âmbito da resolução de situações-problema.

Tais considerações foram especialmente voltadas para uma discussão fundada no Campo Conceitual Multiplicativo de Vergnaud, objetivando uma tentativa de compreendermos o quanto a amplitude de possibilidades em termos de percepção e produção de registros de desenvolvimento projeta elementos significantes. Através das atividades propostas, encaminhamos uma análise dos registros dos erros e acertos proporcionados pelos alunos, quando das situações propostas pelas atividades. Assim, as situações-problema foram analisadas com o objetivo de observar os esquemas, definidos como os caminhos percorridos pelos alunos na resolução de problemas propostos. Conseguiu-se identificar a forma e o estilo de uso e a escolha do esquema utilizado, de maneira a encaminhar uma proposta de resolução, com base em esquemas e modelos configurados pelos alunos. Pode-se dizer que a análise das resoluções é uma estratégia eficiente, porque permite compreender as dificuldades que os alunos enfrentam diante de um conteúdo ou conceito matemático.

Ao verificar os erros e acertos na resolução das atividades aplicadas, constatou-se que o conteúdo de múltiplos e divisores é responsável por um baixo índice de aprendizagem dos alunos. Ao realizar o levantamento das questões, o resultado apontou que o desempenho geral dos 44 alunos atingiu um acerto de 87 questões, considerado baixo, para um total de 220 resoluções realizadas, confirmando a dificuldade apontada pelo professor das turmas.

Observou-se ainda, na resolução das questões, que muitos alunos apresentaram dificuldades em identificar a operação para estruturar as respostas. Notaram-se muitos erros de divisão e multiplicação que conduziram a respostas erradas nas resoluções, o que, em termos de avaliação, permitiu fazer um diagnóstico inicial em relação as operações de multiplicar e dividir.

Apesar desse diagnóstico trazer muitas limitações e dificuldades relacionadas aos obstáculos conceituais que os estudantes possuem quando da resolução dos problemas propostos, entendemos que uma boa recomendação ao trabalho docente do professor é fornecer uma variação de situações propostas, envolvendo possibilidades de construção e elaboração de esquemas conceituais diversos, mas que forneçam uma diretriz de significado para os processos de resolução de problemas, visando resultados válidos.

Não se pretende com este trabalho esgotar a discussão acerca desse tema, além do que o tempo foi um fator limitante, que trouxe algumas contribuições para o pesquisador que, com base nos resultados obtidos, conseguiu visualizar algumas dificuldades enfrentadas pelos alunos na resolução de situações-problema do conteúdo de múltiplos e divisores. Assim, espera-se que este estudo sirva de base para ampliar esta investigação em novas vertentes em trabalhos futuros, com alunos de outras séries, impulsionando-os a percorrer caminhos diferentes para melhorar a aprendizagem dos conceitos de conteúdos considerados difíceis da disciplina de Matemática.

Entendemos, portanto, que essa configuração de estudo e investigação, a partir dessa experiência, relatada neste artigo, projeta uma construção que está consolidada numa concepção de apropriação e assimilação do saber, tanto pelo aluno quanto pelo docente envolvido com a turma. O espaço dessa apropriação assim pode fornecer elementos para pensarmos possibilidades de entendimento e compreensão das dificuldades e limitações que nossos alunos possuem. A Teoria de Vergnaud é uma, entre tantas outras, as quais nos permitem pensar em reflexões e ações capazes de fornecer elementos importantes para pensarmos em melhorias e esclarecimentos que possam projetar elementos fundantes para um dos nossos principais objetivos em educação que é o de proporcionar ensinamentos satisfatórios aos nossos alunos.

Referências

BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. **A Aprendizagem Matemática:** na perspectiva da teoria dos campos conceituais. Curitiba: CRV, 2009.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática.** Brasília: Secretaria de Educação Fundamental, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 31 maio 2018.

GIL, A. C. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social.** 5 ed. São Paulo: Atlas, 1999.

KLEIN, M. E. Z.; COSTA, S. S. C. da. Investigando as concepções prévias dos alunos do segundo ano do ensino médio e seus desempenhos em alguns conceitos do campo conceitual da trigonometria. **Revista Bolema**, Rio Claro, v. 24, n. 38, p. 43 – 73, 2011.

MOREIRA, M. A. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Revista Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, v. 7, n. 1, p. 7–29, 2002.

PATARO, P. M.; SOUZA, J. **Vontade de saber matemática:** 6° ano-ensino fundamental II. São Paulo: FTD, 2015.

SANTOS, A. dos. **Processos de formação colaborativa com foco no Campo Conceitual Multiplicativo**: um caminho possível com professores polivalentes. Tese (Doutorado em Educação Matemática). 2012. Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2012.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade:** problemas do ensino da matemática na escola elementar. Curitiba: Ed. da UFPR, 2014.